B. Barthlein Joh
Diss. Erlangen
1887
-7

Zur Theorie

der

assoziierten Formen.

Inauguraldissertation,

der philosophischen Fakultät

der

Friedrich-Alexanders-Universität in Erlangen

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

vorgelegt von

Johann Bärthlein.

Nürnberg, 1887.

Druck der Schärtel'schen Offizin (Theodor Hässlein).

Vorwort.

Hermite hat im XII. Bande des Crelle'schen Journals Seite 18 u. ff. gezeigt, dass für jede binäre Form f n^{ten} Grades eine endliche Anzahl von Kovarianten existiert, durch welche sich alle übrigen zu f gehörigen Kovarianten als rationale Funktionen darstellen lassen. Diese Kovarianten nennt Hermite »assoziierte Formen«. Clebsch hat ferner im III. Bande der mathematischen Annalen Seite 265—267 nachgewiesen, dass diese von Hermite aufgestellten Formen sich selbst wieder darstellen lassen als rationale Funktionen einfachster Formen f, φ und ψ. Diese Funktionen nun werden in vorliegender Arbeit mit Hilfe von Rekursionsformeln entwickelt, ihr Bildungsgesetz angegeben und zur Berechnung der dabei auftretenden numerischen Koeffizienten allgemeine Formeln aufgestellt.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. P. Gordan in Erlangen, für die vielfache Anregung, die derselbe mir bei dieser Arbeit zu teil werden liess, meinen besten Dank auszusprechen.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548412_0102

Um die sämmtlichen zu einer gegebenen Form f n^{ten} Grades gehörigen algebraischen Formen auf eine möglichst kleine Zahl von Hauptformen zu reduzieren, gibt es zwei Wege. Einmal kann man ein kleinstes System von Formen aufstellen, durch welche sich alle zu f gehörigen Kovarianten und Invarianten als ganze rationale Funktionen darstellen lassen. Dieses System ist immer ein endliches, wie Gordan mit Hilfe symbolischer Darstellung bewiesen hat. Der zweite Weg wurde von Hermite eingeschlagen. Derselbe hat nämlich gezeigt, dass sich alle Kovarianten und Invarianten einer Form f rational durch eine begrenzte Anzahl derselben ausdrücken lassen, wobei im Nenner immer nur Potenzen einer und derselben Kovariante oder Invariante auftreten. Diese letztere Methode soll im folgenden eingehender erörtert werden.

Es sei gegeben eine binäre Form f (x_1, x_2) n^{ten} Grades und eine Kovariante π (x_1, x_2) dieser Form. Da man jede Kovariante π (x_1, x_2) als simultane Invariante der beiden Formen

$$f(y_1, y_2), \quad - x_2 y_1 + x_1 y_2$$

mit den Variabeln y_1, y_2 auffassen kann, so lässt sich in f (y_1, y_2) und π (y_1, y_2) eine lineare Substitution

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi^0{}_1 y_1 + \xi^0{}_2 y_2, \\ \xi_2 &= \xi^1{}_1 y_1 + \xi^1{}_2 y_2 \end{aligned}$$

machen, in der die Koeffizienten $\xi^0{}_1$, $\xi^0{}_2$, $\xi^1{}_1$, $\xi^1{}_2$ Funktionen von x_1, x_2 sind. Nimmt man insbesondere für ξ_1 die erste Polare $\frac{\partial \omega}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} y_2$ einer Kovariante ω (x_1, x_2) von

$f(x_1, x_2)$, wobei sich die $\frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \frac{\partial \omega}{\partial x_2}$ analog transformieren wie die Grössen $-x_2, x_1$, und für ξ_2 die Form $-x_2 y_1 + x_1 y_2$ selbst, so werden die Koeffizienten der transformierten Form sämmtlich Kovarianten von $f(x_1, x_2)$.

Schreibt man die Substitutionsgleichungen in der Form

$$\omega \xi_1 = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} y_2\right),$$

$$\omega \xi_2 = -x_2 y_1 + x_1 y_2,$$

wo ν den Grad der Kovariante ω in den Variabeln bedeutet, so erhält man umgekehrt für y_1, y_2 die Gleichungen

$$y_1 = x_1 \xi_1 - \frac{1}{\nu}\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \xi_2,$$

$$y_2 = x_2 \xi_1 + \frac{1}{\nu}\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \xi_2.$$

Setzt man nun in $f(y_1, y_2)$ die Werte für y_1, y_2 ein und entwickelt nach der Taylor'schen Reihe, so bekommt man eine homogene Funktion n^{ten} Grades in ξ_1, ξ_2, nämlich

$$f\left(x_1 \xi_1 - \frac{1}{\nu}\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \xi_2,\ x_2 \xi_1 + \frac{1}{\nu}\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \xi_2\right)$$

$$= \omega_0 \xi_1^n + \binom{n}{1} \omega_1 \xi_1^{n-1} \xi_2 + \ldots + \omega_n \xi_2^n,$$

wobei $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$ Kovarianten sind. Denn irgend ein Koeffizient der Entwicklung, etwa der von $\xi_1^{n-k} \xi_2^k$, entsteht aus der k^{ten} Polaren von $f(x_1, x_2)$

$$\frac{1}{n(n-1)\ldots(n-k+1)}\left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^k f(x_1, x_2)$$

dadurch, dass man die Grössen y_1, y_2 bezüglich durch $-\frac{1}{\nu}\frac{\partial \omega}{\partial x_2}, \frac{1}{\nu}\frac{\partial \omega}{\partial x_1}$ ersetzt, so dass man für $k = 0, 1, \ldots$ die Beziehungen

$$\omega_0 = f(x_1, x_2),$$
$$\omega_1 = \frac{1}{n\,\nu}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right),$$

u. s. w.

erhält. Die Kovarianten $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ nennt Hermite die zu ω assoziierten Kovarianten.

Macht man in der Kovariante $\pi(y_1, y_2)$, welche vom Grade μ in den Variabeln sein möge, dieselbe Substitution wie in $f(y_1, y_2)$, so erhält man die Beziehung

$$\omega^{\lambda}\,\pi\left(x_1\,\xi_1 - \frac{1}{\nu}\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\xi_2, x_2\,\xi_1 + \frac{1}{\nu}\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\xi_2\right)$$
$$= c_0\,\xi_1^{\mu} + \binom{\mu}{1} c_1\,\xi_1^{\mu-1}\xi_2 + \ldots + c_\mu\,\xi_2^{\mu},$$

wobei die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_\mu$ ebenfalls Kovarianten und zwar rationale ganze Funktionen der Formen f, ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_n sind. Denn die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ gehen aus den Koeffizienten f, ω_1, $\omega_2, \ldots$, ω_n der transformierten Form f genau ebenso hervor, wie die Koeffizienten von $\pi(x_1, x_2)$ aus den Koeffizienten von $f(x_1, x_2)$. Die Substitutionsdeterminante ist dabei die Form ω selbst und der Exponent λ das Gewicht derselben.

Wird in der letzten Gleichung $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$ gesetzt, so reduziert sich die linke Seite auf $\omega^{\lambda}\pi(x_1, x_2)$ und die rechte Seite auf den Koeffizienten c_0 der höchsten Potenz von ξ_1; da aber dieser nach dem Vorhergehenden eine ganze rationale Funktion von f, ω_1, $\omega_2, \ldots$, ω_n ist, so hat man die Beziehung

$$\omega^{\lambda}\pi(x_1, x_2) = (f, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

Hieraus folgt der Satz, dass sich jede Kovariante π einer Form f darstellen lässt als rationale Funktion von f und den zu einer beliebigen Kovariante ω dieser Form assoziierten Kovarianten $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, wobei im Nenner immer nur eine Potenz der Kovariante ω auftritt.

Ein besonders ausgezeichnetes System solcher Kovarianten ergibt sich, wenn man statt der Kovariante ω die Form f selbst einführt. Die Substitutionsgleichungen lauten dann

$$y_1 = x_1\,\xi_1 - \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_2}\xi_2,$$

$$y_2 = x_2\,\xi_1 + \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_1}\xi_2,$$

und man erhält aus $f(y_1, y_2)$ die Gleichung

$$f\left(x_1\,\xi_1 - \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_2}\xi_2,\ x_2\,\xi_1 + \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_1}\xi_2\right)$$

$$= f_0\,\xi_1^{\,n} + \binom{n}{1} f_1\,\xi_1^{\,n-1}\xi_2 + \ldots + f_n\,\xi_2^{\,n},$$

wobei

$$f_0 = f(x_1, x_2),$$

$$f_1 = \frac{1}{n^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_1}\right),$$

u. s. w.

ist.

Da $f_1 = 0$ ist, so besteht das zur Form f assoziierte System in diesem Falle nur aus den von einander unabhängigen Formen $f_2, f_3, \ldots, f_n$. Jede Kovariante von f ist mithin eine rationale Funktion der Formen $f, f_2, f_3, \ldots f_n$, wobei im Nenner immer nur eine Potenz von f steht.

Diese Formen f sind jedoch nicht die einfachsten. Clebsch hat nämlich gezeigt, dass die Formen f selbst wieder

dargestellt werden können als rationale Funktionen von Kovarianten φ, ihren Funktionaldeterminanten ψ gegen f und der Form f selbst. Die Formen φ und ψ sind dabei in symbolischer Darstellung definiert durch die Gleichungen

$$\varphi_{2\nu} = (f, f)^{2\nu} = a_x^{n-2\nu} b_x^{n-2\nu} (ab)^{2\nu},$$

$$\psi_{2\nu+1} = \big((f, f)^{2\nu}, f\big) = a_x^{n-2\nu-1} b_x^{n-2\nu} c_x^{n-1} (ab)^{2\nu} (ac).$$

Daraus folgt, dass überhaupt alle Formen von f als rationale Funktionen von f, φ und ψ dargestellt werden können. Die Formen f, φ und ψ bilden somit das einfachste assoziierte Formensystem, das einfachste, weil es überhaupt keine einfacheren zu f gehörigen Formen als die genannten gibt.

Ihre Anzahl ist gleich n. Ist nämlich $n = 2\nu + 1$, so ist die Anzahl der φ gleich ν, ebenso die Anzahl der Funktionaldeterminanten ψ, also die Gesammtzahl der Formen φ uud ψ einschliesslich f gleich $2\nu + 1 = n$; ist ferner $n = 2\nu$, so gibt es zwar wieder ν Formen φ, aber eine derselben ist Invariante und es existieren infolge dessen nur $\nu - 1$ Funktionaldeterminanten ψ, so dass mit Einschluss von f die Gesammtzahl der Formen gleich $2\nu = n$ ist.

Um nun Formeln zu finden, mit Hilfe deren die f als Funktionen von f, φ und ψ berechnet werden können, kann man folgenden Weg einschlagen.

Es sei in symbolischer Darstellung gegeben

$$f = a_x^n = b_x^n = \ldots,$$

dann ist

$$a_x^{n-1} a_y = f_y = f_1 y_1 + f_2 y_2,$$

wenn $a_x^{n-1} a_1 = f_1$ und $a_x^{n-1} a_2 = f_2$ gesetzt wird. Da f infolge dessen wie ein Symbol behandelt werden kann, so besteht die Identität

$$f_x (ab) = b_x (af) - a_x (bf).$$

Hat man nun irgend ein symbolisches zur Form f gehöriges Produkt P, welches λ Klammerfaktoren besitzen möge, so kann man dieses Produkt mit der Potenz f^{λ} multiplizieren und dann jeden mit f multiplizierten Klammerfaktor von der Form (ab) mittelst der angegebenen Identität in solche von der Form (af) überführen; auf diese Weise geht das Produkt $P f^{\lambda}$ in ein Aggregat von neuen symbolischen Produkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ über; die Faktoren eines solchen Produktes sind einerseits Faktoren erster Art wie $a_x, b_x, \ldots$, andererseits Klammerfaktoren wie $(af), (bf), \ldots$; daraus folgt, dass ein solches Produkt P ein Produkt einfacher Formen u ist von der Gestalt

$$u_k = a_x^{n-k} (af)^k,$$

wobei k die Werte von Null bis n annehmen kann. Das Produkt $P . f^{\lambda}$ ist somit eine ganze Funktion dieser Grössen u.

Jede dieser Formen u besitzt den Faktor f. Denn es ist

$$u_0 = a_x^n = f,$$

$$u_1 = a_x^{n-1} (af) = a_x^{n-1} b_x^{n-1} (ab) = 0,$$

$$u_2 = a_x^{n-2} (af)^2 = a_x^{n-2} b_x^{n-1} (ab) (af)$$
$$= \tfrac{1}{2} a_x^{n-2} b_x^{n-2} f (ab)^2 = \tfrac{1}{2} f (f, f)^2.$$

Differentiiert man die letzte Gleichung nach x und ersetzt die Inkremente durch f, so erhält man

$$(n-2) a_x^{n-3} (af)^3 + 2(n-1) a_x^{n-2} b_x^{n-2} (af) (bf) (ab)$$
$$= (n-2) f((f, f)^2, f).$$

Da das zweite Glied auf der linken Seite gleich Null ist, so folgt

$$u_3 = a_x^{n-3} (af)^3 = f((f, f)^2, f).$$

Auf diese Weise erhält man schliesslich

$$u_k = a_x^{\,n-k}\,(af)^{\,k} = f\,U.$$

Nimmt man an, dass die Gleichung für u_k richtig ist, so erhält man durch denselben Differentiationsprozess wie oben

$$(n-k)\,a_x^{\,n-k-1}\,(af)^{\,k+1} = -k\,(n-1)\,a_x^{\,n-k}\,b_x^{\,n-2}\,(ab)\,(af)^{\,k-1}\,(bf) + f\,(U, f).$$

Nun ist

$$a_x^{\,n-k}\,b_x^{\,n-2}\,(ab)\,(af)^{\,k-1}\,(bf) = {}^1/_2\,a_x^{\,n-k}\,b_x^{\,n-k}\,(ab)(af)(bf)$$

$$\cdot\left(b_x^{\,k-2}\,(af)^{\,k-2} - a_x^{\,k-2}\,(bf)^{\,k-2}\right) = {}^1/_2\,a_x^{\,n-k}\,b_x^{\,n-k}\,(ab)(af)(bf)$$

$$\cdot\left[(a_x\,(bf) - f\,(ab))^{\,k-2} - a_x^{\,k-2}\,(bf)^{\,k-2}\right].$$

Entwickelt man die rechte Seite dieser Gleichung nach dem binomischen Lehrsatz, so zeigt es sich, dass jedes Glied der Entwicklung den Faktor f besitzt, mithin der ganze Ausdruck für u_{k+1}. Folglich hat der Annahme entsprechend auch die Form u_k den Faktor f.

Sind nun die Kovarianten φ und ψ in der Form gegeben

$$\varphi_{2\nu} = a_x^{\,n-2\nu}\,b_x^{\,n-2\nu}\,(ab)^{\,2\nu},$$

$$\psi_{2\nu+1} = a_x^{\,n-2\nu-1}\,b_x^{\,n-2\nu}\,(ab)^{\,2\nu}\,(af),$$

so kann man beide Gleichungen mit dem Faktor $f^{2\nu}$ multiplizieren und hierauf auf die rechten Seiten die Identität

$$f\,(ab) = b_x\,(af) - a_x\,(bf)$$

anwenden. Dadurch gehen obige Gleichungen über in

$$f^{2\nu}\varphi_{2\nu} = a_x^{n-2\nu}\, b_x^{n-2\nu}\, (f(ab))^{2\nu}\; a_x^{2\nu}\, b_x^{n-2\nu}\, (b_x(af) - a_x(bf))^{n-2\nu}$$

$$= u_{2\nu}\, u_0 - \binom{2\nu}{1} u_{2\nu-1}\, u_1 + \binom{2\nu}{2} u_{2\nu-2}\, u_2 - \ldots$$

$$- \binom{2\nu}{1} u_1\, u_{2\nu-1} + u_0\, u_{2\nu},$$

$$f^{2\nu}\psi_{2\nu+1} = a_x^{n-2\nu-1}\, b_x^{n-2\nu}\, (af)^{2\nu}(f(ab)) = a_x^{2\nu}\, b_x^{n-2\nu-1}\, (af)$$

$$.(b_x(af) - a_x(bf))^{n-2\nu} = u_{2\nu+1}\, u_0 - \binom{2\nu}{1} u_{2\nu}\, u_1 + \binom{2\nu}{2} u_{2\nu-1} u_2 -$$

$$\ldots - \binom{2\nu}{1} u_2\, u_{2\nu-1} + u_1\, u_{2\nu}.$$

Da aber $u_0 = f$ und $u_1 = 0$ ist, so folgen hieraus die Beziehungen

$$f\, u_{2\nu} = {}^1/_2\, f^{2\nu}\varphi_{2\nu} - \binom{2\nu}{2} u_{2\nu-2}\, u_2 + \ldots - (-1)^{\nu-1} \binom{2\nu}{\nu-1}$$

$$. u_{\nu+1}\, u_{\nu-1} - {}^1/_2\, (-1)^{\nu} \binom{2\nu}{\nu} u_\nu^{\,2},$$

$$f\, u_{2\nu+1} = f^{2\nu}\psi_{2\nu+1} - \binom{2\nu}{2} u_{2\nu-1}\, u_2 + \ldots - \binom{2\nu}{2} u_3\, u_{2\nu-2}$$

$$+ \binom{2\nu}{1} u_2\, u_{2\nu-1}.$$

Mittelst dieser Rekursionsformeln können die u als ganze rationale Funktionen der Formen f, φ und ψ berechnet werden

Dass die Formen u, abgesehen vom Vorzeichen, mit den früher entwickelten Formen f identisch sind, erhellt aus folgenden Betrachtungen.

Entwickelt man den Ausdruck

$$u_k = a_x^{n-k}\, (af)^k = a_x^{n-k}\, (a_1\, f_2 - a_2\, f_1)^k$$

nach dem binomischen Lehrsatz, so hat das i^{te} Glied der Entwicklung die Form

$$\binom{k}{i} a_x^{n-k} (a_1 f_2)^{k-i} (a_2 f_1)^i .$$

Andererseits ist

$$f_k = \frac{1}{n(n-1)\dots(n-k+1)} \left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^k f(x_1, x_2),$$

wenn man $y_1 = -\frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_2}$ und $y_2 = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_1}$ setzt.

Entwickelt man die rechte Seite dieser Gleichung ebenfalls, so erhält man als i^{tes} Glied den Ausdruck

$$\frac{1}{n(n-1)\dots(n-k+1)} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^{k-i} \left(\frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^i \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k-i} \partial x_2^i}.$$

Da nun symbolisch $f = a_x^n$ ist, so folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = n a_x^{n-1} a_1 = n f_1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = n a_x^{n-1} a_2 = n f_2,$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k-i} \partial x_2^i} = n(n-1)\dots(n-k+1) a_x^{n-k} a_1^{k-i} a_2^i .$$

Mittelst dieser Beziehungen lässt sich das i^{te} Glied der Entwicklung von f_k in das i^{te} Glied von u_k überführen.

Setzt man in die Formeln für $u_{2\nu}$ und $u_{2\nu+1}$ der Reihe nach für ν die Werte 1, 2, 3, ... ein, substituiert auf den rechten Seiten der so entstehenden Gleichungen für die u ihre Werte in f, φ und ψ, dividiert hierauf jede Gleichung mit f, so erhält man folgendes Gleichungssystem:

$u_2 = \frac{1}{2} f \varphi_2 = A_2 f \varphi_2,$

$u_3 = f \psi_3 = A_3 f \psi_3,$

$u_4 = \frac{1}{2} f^3 \varphi_4 - \frac{1}{2} \binom{4}{2} A_2^2 f \varphi_2^2 = A_4 f^3 \varphi_4 + A_{2\cdot 2} f \varphi_2^2,$

$u_5 = f^3 \psi_5 - \left(\binom{4}{2} - \binom{4}{3} \right) A_2 A_3 f \varphi_2 \psi_3 = A_5 f^3 \psi_5 + A_{2,3} f \varphi_2 \psi_3,$

u. s. w.,

wobei allgemein der numerische Koeffizient eines Gliedes von der Form

$$\varphi_a^{\alpha}\varphi_b^{\beta}\cdots\varphi_f^{\eta}\varphi_g^{\vartheta}\psi_l^{\lambda}\psi_m^{\mu}\cdots\psi_r^{\varrho}\psi_s^{\sigma}$$

mit $A_{\alpha a}$, $_{\beta b}, \ldots, {}_{\sigma s}$ bezeichnet wird und die Grössen a, b, ..., g gerade, dagegen die Grössen l, m, ..., s ungerade Zahlen darstellen sollen.

Die Indices sowohl für die Formen u als für die Formen φ und ψ sind so gewählt, dass sie das Gewicht derselben angeben. Aus dem eben aufgestellten Gleichungssystem ist nun ersichtlich, dass sich die rechten Seiten, abgesehen von den Faktoren f und den numerischen Koeffizienten, aus einer Summe von Produkten der Formen φ und ψ in der Weise zusammensetzen, dass das Gewicht eines solchen Produktes immer denselben Wert hat und dem Gewicht des zugehörigen u auf der linken Seite gleich ist, wenn man unter dem Gewicht eines solchen Produktes die Summe der Gewichte der einzelnen Faktoren φ und ψ versteht. Betrachtet man nämlich die beiden Gleichungen

$$u_{2\nu} = {}^1\!/_2\, f^{2\nu-1}\varphi_{2\nu} \pm {}^1\!/_2\, \frac{1}{f}\sum_{k=2}^{k=2\nu-2}\binom{2\nu}{k} u_k\, u_{2\nu-k},$$

$$u_{2\nu+1} = f^{2\nu-1}\psi_{2\nu+1} \pm \frac{1}{f}\sum_{k=2}^{k=2\nu-1}\binom{2\nu}{k} u_k\, u_{2\nu-k+1},$$

in denen das Vorzeichen + oder − gilt, je nachdem k ungerade oder gerade ist, so genügt das erste Glied der rechten Seite einer jeden Gleichung der aufgestellten Behauptung. Der zweite Teil besteht aus einer Summe von Produkten aus je zwei Grössen u, deren Gewicht kleiner als das von u_n ist, jedoch in der Weise, dass die Indicessumme von je zwei mit einander multiplizierten u gleich n ist. Nimmt man nun an, dass alle u von kleinerem Gewichte als u_n sich in gleicher Weise wie die Grössen u_2, u_3, ... so darstellen lassen, dass die Produkte aus φ und ψ gleiches Gewicht haben mit den

zugehörigen u, so müssen offenbar obigen Gleichungen gemäss auch die Produkte aus je zwei u, deren Indicessumme gleich n ist, aus solchen Produkten der φ und ψ vom Gesammtgewicht n bestehen.

Man sieht ferner aus den Gleichungen für $u_{2\nu}$ und $u_{2\nu+1}$, dass jedes Element φ oder ψ einmal als Glied für sich in seinem zugehörigen u auftritt; das Produkt zweier solcher Elemente kommt dann notwendig in dem u vor, dessen Index gleich dem Gewicht des Produktes ist, da es durch Multiplikation zweier u entstanden ist, deren Indicessumme gleich dem Index des höheren u ist Fügt man diesem Produkt ein drittes Element hinzu, so erhält man ein neues Produkt, welches aus demselben Grunde dem u angehört, dessen Index gleich dem Gewicht des Produktes ist. Auf diese Weise erhält man schliesslich ein Produkt vom Gewichte n und dieses muss dann notwendig aus demselben Grunde in dem Ausdruck für u_n vorkommen. Da nun ein solches Produkt aus Elementen φ und ψ ganz beliebig gebildet ist, so folgt daraus, dass in der Gleichung für u_n alle möglichen Produkte auftreten, deren Gewicht gleich dem Index von u_n ist.

Denkt man sich ferner ein beliebiges in u_n vorkommendes Produkt aus φ und ψ auf irgend eine Weise in zwei Faktoren zerlegt, so gehört jeder derselben nach dem vorigen Satze einem u an, dessen Index gleich dem Gewicht dieses Faktors ist; man kann sich also obiges Produkt durch Multiplikation dieser beiden u entstanden denken; da jedoch die Faktoren des Produktes ganz beliebig gewählt wurden und in dem Ausdruck für u_n alle möglichen Produkte aus je zwei u vorkommen, deren Indicessumme gleich n ist, so folgt daraus, dass obiges Produkt so oft in u_n auftritt, als sich dasselbe als Produkt aus zwei Faktoren in verschiedener Weise darstellen lässt; dabei muss jedoch ein Faktor mindestens aus einem Elemente φ oder ψ bestehen, wie aus den Entwicklungen für die u ersichtlich ist.

Jedes Produkt ist mit einer Potenz von f multipliziert. Es soll nun der Exponent dieser Potenz bestimmt werden.

Die Gleichungen für $u_{2\nu}$ und $u_{2\nu+1}$ zeigen, dass jedes Element $\varphi_{2\nu}$ und $\psi_{2\nu+1}$ bei seinem ersten Auftreten mit dem Faktor $f^{2\nu-1}$ multipliziert ist, ferner dass, so oft zwei u mit einanander multipliziert werden, die so entstehenden Produkte durch den Faktor f dividiert sind; da aber die Anzahl dieser Multiplikationen um 1 kleiner ist als die Zahl der Faktoren, so wird, wenn man ein Produkt von der Form

$$\varphi_a^{\alpha}\,\varphi_b^{\beta}\cdots\varphi_g^{\vartheta}\,\psi_l^{\lambda}\,\psi_m^{\mu}\cdots\psi_s^{\sigma}$$

hat, nach dem Vorausgehenden der zugehörige Exponent von f den Wert haben

$$\alpha(a-1)+\beta(b-1)+\ldots+\vartheta(g-1)+\lambda(l-2)+\mu(m-2)+\ldots+\sigma(s-2)$$
$$-(\alpha+\beta+\ldots+\vartheta+\lambda+\mu+\ldots+\sigma-1)=$$
$$\alpha(a-2)+\beta(b-2)+\ldots+\vartheta(g-2)+\lambda(l-3)+\mu(m-3)+\ldots+\sigma(s-2)+1.$$

Da die Grössen a, b, ..., g gerade, die Grössen l, m, ..., s ungerade Zahlen sind, so ist der ganze Ausdruck offenbar eine ungerade Zahl, welche für $a = b = \ldots = g = 2$ und $l = m = \ldots = s = 3$ ihr Minimum, nämlich den Wert 1 erreicht. Das Produkt setzt sich in diesem Falle nur aus Elementen φ_2 und ψ_3 zusammen. Da 1 der kleinste Exponent von f ist, welcher in dem Ausdruck für u auftreten kann, so folgt daraus, dass die rechten Seiten der Gleichungen für die u den Faktor f besitzen, ein Ergebnis, welches mit einem oben gefundenen Resultat bezüglich der u übereinstimmt.

Es werden nun Rekursionsformeln aufgestellt, welche dazu dienen, den numerischen Koeffizienten eines Produktes von der Form

$$\varphi_a^{\alpha}\,\varphi_b^{\beta}\cdots\varphi_g^{\vartheta}\,\psi_l^{\lambda}\cdots\psi_m^{\mu}\,\psi_s^{\sigma}$$

und vom Gewichte n zu berechnen.

Aus vorhergehenden Auseinandersetzungen erhellt, dass ein Produkt wie das gegebene in dem Ausdruck für u_n so oft vorkommt, als sich dasselbe aus je zwei Faktoren, deren Gewichtssumme dem Gewicht des Produktes gleichkommt, in verschiedener Weise darstellen lässt. Da diese Faktoren

immer solchen u angehören, deren Indices gleich den Gewichten desselben sind, so folgt aus den Formeln für $u_{2\nu}$ und $u_{2\nu+1}$, dass das aus diesen Faktoren gebildete Produkt mit einem Binomialkoeffizienten multipliziert ist, dessen Zeiger gleich dem Gewicht des einen Faktors ist, dass ferner das nämliche Produkt ein zweites Mal auftritt multipliziert mit einem Binomialkoeffizienten, dessen Zeiger dem Gewicht des andern Faktors gleich ist. Nur das Produkt, welches durch Multiplikation zweier gleicher Faktoren entsteht, tritt bloss einmal auf. Das Vorzeichen ist dabei + oder —, je nachdem der Zeiger ungerade oder gerade ist.

Ist also der numerische Koeffizient eines allgemeinen Produktes $A_{\alpha a,\ \beta b,\ldots,\sigma s}$, so erhält man für den Fall, dass n gerade ist, nach dem Vorhergehenden, wenn man dabei den Ausdruck für u_n berücksichtigt, folgende Gleichung:

$$A_{\alpha a,\beta b,\ldots,\sigma s} = \pm\,{}^1/_2 \Sigma \binom{\alpha a+\beta b+\ldots+\sigma s}{\alpha_1 a+\beta_1 b+\ldots+\sigma_1 s} \cdot A_{\alpha_1 a,\beta_1 b,\ldots,\sigma_1 s} \cdot A_{(\alpha-\alpha_1)a,(\beta-\beta_1)b,\ldots,(\sigma-\sigma_1)s}.$$

Setzt man nun

$$\frac{a!^{\alpha_1} b!^{\beta_1} \ldots s!^{\sigma_1}}{(\alpha_1 a+\beta_1 b+\ldots+\sigma_1 s)!} \cdot A_{\alpha_1 a,\beta_1 b,\ldots,\sigma_1 s} = B_{\alpha_1 a,\beta_1 b,\ldots,\sigma_1 s},$$

$$\frac{a!^{\alpha-\alpha_1} b!^{\beta-\beta_1} \ldots s!^{\sigma-\sigma_1}}{((\alpha-\alpha_1)a+(\beta-\beta_1)b+\ldots+(\sigma-\sigma_1)s)!} A_{(\alpha-\alpha_1)a,(\beta-\beta_1)b,\ldots,(\sigma-\sigma_1)s} = B_{(\alpha-\alpha_1)a,(\beta-\beta_1)b,\ldots,(\sigma-\sigma_1)s},$$

so geht obige Gleichung über in

$$A_{\alpha a,\beta b,\ldots,\sigma s} = \pm\,{}^1/_2 \frac{(\alpha a+\beta b+\ldots+\sigma s)!}{a!^{\alpha} b!^{\beta} \ldots s!^{\sigma}} \cdot \Sigma B_{\alpha_1 a,\beta_1 b,\ldots,\sigma_1 s} \cdot B_{(\alpha-\alpha_1)a,(\beta-\beta_1)b,\ldots,(\sigma-\sigma_1)s}$$

oder

$$\text{I.}\quad {}^{A}_{\alpha a, \beta b, \ldots, \sigma s} = {}^{1}/_{2} \frac{(\alpha a + \beta b + \ldots + \sigma s)!}{a!^{\alpha} b!^{\beta} \ldots s!^{\sigma}} {}^{B}_{\alpha a, \beta b, \ldots, \sigma s},$$

wenn

$$+\Sigma {}^{B}_{\alpha_1 a, \beta_1 b, \ldots, \sigma_1 s} \cdot {}^{B}_{(\alpha-\alpha_1) a, (\beta-\beta_1) b, \ldots, (\sigma-\sigma_1) s} = {}^{B}_{\alpha a, \beta b, \ldots, \sigma s}$$

ist.

Aus vorausgehenden Erörterungen folgt, dass man alle Glieder von $B_{\alpha a, \beta b, \ldots, \sigma s}$ erhält, wenn man die Grössen $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \sigma_1$ alle Werte von Null bis respektive $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$ durchlaufen lässt in der Weise, dass die Summe $\alpha_1 + \beta_1 + \ldots + \sigma_1$ der Reihe nach alle Werte von 1 bis $\alpha + \beta + \ldots + \sigma - 1$ annimmt. Bezeichnet man nun symbolisch das Produkt

$${}^{B}_{\alpha_1 a, \beta_1 b, \ldots, \sigma_1 s} \cdot {}^{B}_{(\alpha-\alpha_1) a, (\beta-\beta_1) b, \ldots, (\sigma-\sigma_1) s}$$ mit

$$a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \ldots s^{\sigma_1} a_1^{\alpha-\alpha_1} b_1^{\beta-\beta_1} \ldots s_1^{\sigma-\sigma_1},$$ so lässt sich vorliegende Summe in folgender Form darstellen:

$$\text{II.}\quad \pm \Sigma a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \ldots s^{\sigma_1} a_1^{\alpha-\alpha_1} b_1^{\beta-\beta_1} \ldots s_1^{\sigma-\sigma_1} =$$

$$-\big((a+a_1)^{\alpha} (b+b_1)^{\beta} \ldots (g+g_1)^{\vartheta} (l-l_1)^{\lambda} (m-m_1)^{\mu} \ldots (s-s_1)^{\sigma} - a^{\alpha} b^{\beta} \ldots s^{\sigma} - a_1^{\alpha} b_1^{\beta} \ldots s_1^{\sigma}\big),$$

wobei die in dieser Formel auftretenden Binome durch die Reihe

$$(p \pm p_1)^{\pi} = p^{\pi} \pm p^{\pi-1} p_1 + p^{\pi-2} p_1^{2} \pm \ldots + (-1)^{\pi-1} p p_1^{\pi-1} + (-1)^{\pi} p_1^{\pi}$$

definiert sind.

Man sieht sofort, dass die Anzahl der Faktoren eines

jeden Gliedes auf beiden Seiten der Gleichung II immer gleich $\alpha+\beta+\ldots+\sigma$ ist und dass die rechte Seite alle Glieder enthält, welche in der Summe links auftreten können, denn die Grössen $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \sigma_1$ durchlaufen alle Werte von Null bis respektive $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$. Es kann ferner ein Glied von der Form $a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \ldots s^{\sigma_1} a^{\alpha-\alpha_1} b^{\beta-\beta_1} \ldots s^{\sigma-\sigma_1}$ in dieser Gleichung nur einmal auftreten, da im anderen Falle irgend ein Faktor p^{π_1} dieses Gliedes durch Multiplikation zweier Potenzen von p entstanden sein müsste, was bei der Zusammensetzung vorliegender Formel unmöglich ist. Das Vorzeichen irgend eines Gliedes der Summe auf der linken Seite ist nach Früherem + oder —, je nachdem der Ausdruck $\alpha_1 a+\beta_1 b+\ldots+\sigma_1 s$ oder, was dasselbe ist, der Ausdruck $\lambda_1+\mu_1\ldots+\sigma_1$ ungerade oder gerade ist. Die Produkte $p^{\pi_1} p_1^{\pi-\pi_1}$ nun, welche Glieder eines Binoms von der Form $(p+p_1)^\pi$ sind, haben immer das positive Vorzeichen. Dagegen besitzen Produkte von der Form $p^{\pi_1} p_1^{\pi-\pi_1}$, wenn sie Glieder eines Binoms $(p-p_1)^\pi$ sind und π gerade ist das Vorzeichen + oder —, je nachdem π_1 gerade oder ungerade, das Vorzeichen — oder +, wenn π ungerade und π_1 gerade oder ungerade ist. Ein Produkt also, dessen Faktoren Glieder von Binomen sind, welche gerade Exponenten π besitzen, wird das Vorzeichen + oder — haben, je nachdem die Summe der Exponenten π_1 dieses Produktes gerade oder ungerade ist; ein Produkt dagegen, dessen Faktoren Glieder von Binomen mit ungeraden Exponenten π sind, hat das Vorzeichen + oder —, je nachdem die Summe der π_1 gerade oder ungerade und die Anzahl der Faktoren gerade ist, was dem Fall, dass n gerade ist, entspricht, das Vorzeichen — oder + jedoch, wenn die Summe des π_1 gerade oder ungerade und die Anzahl der Faktoren ungerade ist, was dem Falle, dass n ungerade ist, entspricht. Da nun das allgemeine Glied vorliegender Formel aus solchen Produkten zusammengesetzt und der ganze Ausdruck mit —1 multipliziert ist, so wird dasselbe das Vorzeichen + oder — haben, je nachdem die Summe $\lambda_1+\mu_1+\ldots+\sigma_1$ un-

gerade oder gerade ist. Damit ist die Identität der Gleichung II nachgewiesen.

Ist n ungerade, so erhält man mit Rücksicht auf die Formel für $u_{2\nu+1}$ analog dem ersten Fall folgende Gleichung:

$$A_{\alpha a,\beta b,\ldots,\sigma s} = +\sum \binom{\alpha a+\beta b+\ldots+\sigma s-1}{\alpha_1 a+\beta_1 b+\ldots+\sigma_1 s} \cdot A_{\alpha_1 a,\beta_1 b,\ldots,\sigma_1 s} \cdot A_{(\alpha-\alpha_1)a,(\beta-\beta_1)b,\ldots,(\sigma-\sigma_1)s}$$

oder auch

$$A_{\alpha a,\beta b,\ldots,\sigma s} = \mp\sum \binom{\alpha a+\beta b+\ldots+\sigma s-1}{(\alpha-\alpha_1)a+(\beta-\beta_1)b+\ldots+(\sigma-\sigma_1)s} \cdot A_{\alpha_1 a,\beta_1 b,\ldots,\sigma_1 s} \cdot A_{(\alpha-\alpha_1)a,(\beta-\beta_1)b,\ldots,(\sigma-\sigma_1)s}.$$

Setzt man wieder

$$\frac{a!^{\alpha_1}\, b!^{\beta_1}\ldots s!^{\sigma_1}}{(\alpha_1 a+\beta_1 b+\ldots+\sigma_1 s)!} \cdot A_{\alpha_1 a,\beta_1 b,\ldots,\sigma_1 s} = B_{\alpha_1 a,\beta_1 b,\ldots,\sigma_1 s},$$

$$\frac{a!^{\alpha-\alpha_1}\, b!^{\beta-\beta_1}\ldots s!^{\sigma-\sigma_1}}{((\alpha-\alpha_1)a+(\beta-\beta_1)b+\ldots+(\sigma-\sigma_1)s)!} A_{(\alpha-\alpha_1)a,(\beta-\beta_1)b,\ldots,(\sigma-\sigma_1)s} = B_{(\alpha-\alpha_1)a,(\beta-\beta_1)b,\ldots,(\sigma-\sigma_1)s},$$

so folgt

$$A_{\alpha a,\beta b,\ldots,\sigma s} = \mp\frac{(\alpha a+\beta b+\ldots+\sigma s)!}{a!^{\alpha}\, b!^{\beta}\ldots s!^{\sigma}} \cdot \frac{1}{\alpha a+\beta b+\ldots+\sigma s} \cdot \Sigma(\alpha_1 a+\beta_1 b+\ldots+\sigma_1 s) B_{\alpha_1 a,\beta_1 b,\ldots,\sigma_1 s} \cdot B_{(\alpha-\alpha_1)a,(\beta-\beta_1)b,\ldots,(\sigma-\sigma_1)s}$$

oder

$$\text{III.}\quad A_{\alpha a,\beta b,\ldots,\sigma s} = -\frac{(\alpha a+\beta b+\ldots+\sigma s)!}{a!^{\alpha}\, b!^{\beta}\ldots s!^{\sigma}} \cdot \frac{1}{\alpha a+\beta b+\ldots+\sigma s} \cdot B_{\alpha a,\beta b,\ldots,\sigma s},$$

wenn

$$\pm\Sigma(\alpha_1 a+\beta_1 b+\ldots+\sigma_1 s) B_{\alpha_1 a,\beta_1 b,\ldots,\sigma_1 s} \cdot B_{(\alpha-\alpha_1)a,(\beta-\beta_1)b,\ldots,(\sigma-\sigma_1)s} = B_{\alpha a,\beta b,\ldots,\sigma s}$$

gesetzt wird.

Führt man nun, wie im ersten Falle, symbolische Bezeichnungen ein, so bekommt man für die vorliegende Summe den Ausdruck

$$\text{IV.}\quad \pm\Sigma a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots s^{\sigma_1} a_1^{\alpha-\alpha_1} b_1^{\beta-\beta_1} \dots s_1^{\sigma-\sigma_1} =$$

$$\Big((a+a_1)^{\alpha}(b+b_1)^{\beta}\dots(g+g_1)^{\vartheta}(l-l_1)^{\lambda}(m-m_1)^{\mu}\dots(s-s_1)^{\sigma}$$

$$-a^{\alpha}b^{\beta}\dots s^{\sigma}+a_1^{\alpha}b_1^{\beta}\dots s_1^{\sigma}\Big),$$

wenn allgemein

$$(\alpha_1 a+\beta_1 b\dots\sigma_1 s)\,B_{\alpha_1 a,\beta_1 b,\dots,\sigma_1 s}\,B_{(\alpha-\alpha_1)a,(\beta-\beta_1)b,\dots,(\sigma-\sigma_1)s}$$

$$= a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots s^{\sigma_1} a_1^{\alpha-\alpha_1} b_1^{\beta-\beta_1} \dots s_1^{\sigma-\sigma_1}$$

gesetzt wird. Die Richtigkeit der Gleichung IV erhellt aus dem Beweise für Gleichung II.

Hiemit sind Formeln entwickelt, durch welche der numerische Koeffizient eines Produktes vom Gewichte n dargestellt ist als Funktion von numerischen Koeffizienten solcher Produkte, deren Gewichte kleiner als n sind. Es lassen sich folglich mittelst dieser Formeln successive alle numerischen Koeffizienten berechnen, welche in den Entwicklungen für die u auftreten, was nun an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

In dem Ausdruck für u_n treten 3 Arten von Produkten auf, solche, welche aus Elementen φ und ψ und solche, welche aus Elementen φ oder ψ allein zusammengesetzt sind. Es soll nun zunächst der numerische Koeffizient eines Produktes berechnet werden, welches aus Faktoren φ besteht, mithin die Form $\varphi_a^{\alpha}\varphi_b^{\beta}\varphi_c^{\gamma}\dots\varphi_f^{\eta}\varphi_g^{\vartheta}$ besitzt.

Aus der Formel für $u_{2\nu}$ folgt, dass der numerische Koeffizient von φ_a

$$A_a = \binom{1/2}{1}\frac{a!}{a!} = \frac{a!}{a!}\,B_a$$

ist.

Nach Formel I und II ist dann

$$A_{2a} = -\,{}^1/_2\,\frac{2a!}{a!^2}\,(aa_1) = -\,{}^1/_2\,\frac{2a!}{a!^2}\,B_a\,B_a = \binom{1/2}{2}\,\frac{2a!}{2!^2},$$

$$A_{3a} = -\,{}^1/_2\,\frac{3a!}{a!^3}(a^2a_1 + aa_1^2) = -\,{}^1/_2\,\frac{3a!}{a!^3}(B_{2a}\,B_a + B_a\,B_{2a}) =$$

$$\binom{1/2}{3}\,\frac{3a!}{a!^3},$$

u. s. w.

Auf diese Weise findet man, dass sich der numerische Koeffizient des vorliegenden Produktes darstellen lässt durch folgende Formel:

$$\text{V.}\quad A_{\alpha a,\beta b,\ldots,\vartheta g} = \binom{1/2}{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta}\frac{(\alpha+\beta+\ldots+\vartheta)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\vartheta!}\cdot\frac{(\alpha a+\beta b+\ldots+\vartheta g)!}{a!^\alpha\,b!^\beta\ldots g!^\vartheta}.$$

Man findet die Formel für ein Produkt aus $2, 3, \ldots$ Faktoren bestätigt. Nimmt man nun an, dass dieselbe auch für ein Produkt aus $\alpha+\beta+\ldots+\vartheta-1$ Faktoren Geltung hat, so hat man nur noch zu beweisen, dass dieselbe dann auch für ein Produkt aus $\alpha+\beta+\ldots+\vartheta$ Faktoren richtig ist.

Nach Formel II ist:

$$\pm\Sigma a^{\alpha_1} b^{\beta_1}\ldots g^{\vartheta_1} a_1^{\alpha-\alpha_1} b_1^{\beta-\beta_1}\ldots g_1^{\vartheta-\vartheta_1} =$$

$$-\big((a+a_1)^\alpha (b+b_1)^\beta \ldots (g+g_1)^\vartheta - a^\alpha b^\beta \ldots g^\vartheta - a_1^\alpha b_1^\beta \ldots g_1^\vartheta\big) =$$

$$-\big(aa_1^{\alpha-1} b_1^\beta \ldots g_1^\vartheta + ba_1^\alpha b_1^{\beta-1} \ldots g_1^\vartheta + \ldots + ga_1^\alpha b_1^\beta \ldots g_1^{\vartheta-1}$$

$$+a^2a_1^{\alpha-2} b_1^\beta \ldots g_1^\vartheta + aba_1^{\alpha-1} b_1^{\beta-1} \ldots g_1^\vartheta + \ldots + g^2 a_1^\alpha b_1^\beta \ldots g_1^{\vartheta-2}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+a^{\alpha-1} b^\beta \ldots g^\vartheta a_1 + a^\alpha b^{\beta-1} \ldots g^\vartheta b_1 + \ldots + a^\alpha b^\beta \ldots g^{\vartheta-1} g_1\big).$$

Substituiert man für diese symbolischen Ausdrücke die wirklichen Koeffizienten B und ersetzt letztere durch ihre Werte nach Formel V, so erhält man folgende Summe:

$$B_{\alpha a,\ \beta b,\ldots,\vartheta g} =$$

$$-\Big[\binom{1/2}{1}\binom{1/2}{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta-1}1!\frac{(\alpha+\beta+\ldots+\vartheta-1)!}{\alpha!\ \beta!\ldots\vartheta!}\Big(\binom{\alpha}{1}+\binom{\beta}{1}+\ldots+\binom{\vartheta}{1}\Big)$$

$$+\binom{1/2}{2}\binom{1/2}{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta-2}2!\frac{(\alpha+\beta+\ldots+\vartheta-2)!}{\alpha!\ \beta!\ldots\vartheta!}\Big(\binom{\alpha}{2}+\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{1}+\ldots+\binom{\vartheta}{2}\Big)$$

$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$+\binom{1/2}{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta-1}\binom{1/2}{1}(\alpha+\beta+\ldots\vartheta-1)!\ \frac{1!}{\alpha!\ \beta!\ldots\vartheta!}$$

$$\cdot\Big(\binom{\alpha}{\alpha-1}\binom{\beta}{\beta}\cdots\binom{\vartheta}{\vartheta}+\binom{\alpha}{\alpha}\binom{\beta}{\beta-1}\cdots\binom{\vartheta}{\vartheta}+\ldots+\binom{\alpha}{\alpha}\binom{\beta}{\beta}\cdots\binom{\vartheta}{\vartheta-1}\Big)\Big].$$

Entwickelt man die identische Gleichung

$$(1+x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\ldots(1+x)^{\vartheta}=(1+x)^{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta}$$

auf beiden Seiten nach Potenzen von x und setzt die Koeffizienten gleicher Potenzen einander gleich, so bekommt man folgendes Gleichungssystem:

$$\binom{\alpha}{1}+\binom{\beta}{1}+\cdots+\binom{\vartheta}{1}=\binom{\alpha+\beta+\cdots+\vartheta}{1},$$

$$\binom{\alpha}{2}+\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{1}+\ldots+\binom{\vartheta}{2}=\binom{\alpha+\beta+\cdots+\vartheta}{2},$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$\binom{\alpha}{\alpha-1}\binom{\beta}{\beta}\cdots\binom{\vartheta}{\vartheta}+\binom{\alpha}{\alpha}\binom{\beta}{\beta-1}\cdots\binom{\vartheta}{\vartheta}+\ldots+\binom{\alpha}{\alpha}\binom{\beta}{\beta}\cdots\binom{\vartheta}{\vartheta-1}=\binom{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta}{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta-1}.$$

Mittelst dieser Beziehungen erhält obige Summe die Gestalt

$$B_{\alpha a,\beta b,\ldots,\vartheta g}=-\frac{(\alpha+\beta+\ldots+\vartheta)!}{\alpha!\ \beta!\ldots\vartheta!}\Big(\binom{1/2}{1}\binom{1/2}{\alpha+\beta+\ldots\vartheta-1}+\binom{1/2}{2}$$

$$\cdot\binom{1/2}{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta-2}+\cdots+\binom{1/2}{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta-1}\binom{1/2}{1}\Big).$$

Quadriert man ferner die identische Gleichung

$$\binom{1/2}{1}x+\binom{1/2}{2}x^2+\binom{1/2}{3}x^3+\ldots=(1+x)^{1/2}-1$$

und setzt die Koeffizienten von $x^{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta}$ gleich, so bekommt man die Relation

$$\binom{1/2}{1}\binom{1/2}{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta-1}+\binom{1/2}{2}\binom{1/2}{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta-2}+\cdots$$
$$+\binom{1/2}{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta-1}\binom{1/2}{1}=-2\binom{1/2}{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta}$$

Dadurch wird

$$B_{\alpha a,\beta b,\ldots,\vartheta g}=2\binom{1/2}{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta}\frac{(\alpha+\beta+\ldots+\vartheta)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\vartheta!}$$

und nach Formel I

$$A_{\alpha a,\beta b,\ldots,\vartheta g}=\binom{1/2}{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta}\frac{(\alpha+\beta+\ldots\vartheta)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\vartheta!}$$
$$\cdot\frac{(\alpha a+\beta b+\ldots+\vartheta g)!}{a!^{\alpha}\,b!^{\beta}\ldots g!^{\vartheta}},$$

was zu beweisen war.

Hieran schliesst sich die zweite Aufgabe, den numerischen Koeffizienten eines Produktes zu finden, welcher nur aus Faktoren ψ besteht, also die Form $\psi_a^{\alpha}\psi_b^{\beta}\psi_c^{\gamma}\ldots\psi_f^{\eta}\psi_g^{\vartheta}$ besitzt.

Indem man mit Benützung der Formeln I und III denselben Weg wie beim Produkte aus Faktoren φ einschlägt, findet man als Ausdruck für den numerischen Koeffizienten des vorliegenden Produktes die Formel

$$\text{VI.}\quad A_{\alpha a,\beta b,\ldots,\vartheta g}=\frac{1}{\alpha!\,\beta!\ldots\vartheta!}\,\frac{(\alpha a+\beta b+\ldots+\vartheta g)!}{a!^{\alpha}\,b!^{\beta}\ldots g!^{\vartheta}}.$$

Beim Beweise dieser Formel, welcher auf dieselbe Weise geführt werden kann, wie der Beweis für das Produkt aus Faktoren φ, hat man zu unterscheiden, ob $\alpha+\beta+\ldots+\vartheta$ gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle hat man nach Formel II:

$$\pm\Sigma a^{\alpha_1}\,b^{\beta_1}\ldots g^{\vartheta_1}\,a_1^{\alpha-\alpha_1}\,b_1^{\beta-\beta_1}\ldots g_1^{\vartheta-\vartheta_1}$$
$$=-\left((a-a_1)^{\alpha}(b\quad b_1)^{\beta}\ldots(g-g_1)^{\vartheta}-a^{\alpha}b^{\beta}\ldots g^{\vartheta}-a_1^{\alpha}b_1^{\beta}\ldots g_1^{\vartheta}\right)$$

$$= \Big(aa_1{}^{\alpha-1} b_1{}^{\beta} \ldots g_1{}^{\vartheta} + ba_1{}^{\alpha} b_1{}^{\beta-1} \ldots g_1{}^{\vartheta} + \ldots + ga_1{}^{\alpha} b_1{}^{\beta} \ldots g_1{}^{\vartheta-1}$$
$$- a^2 a_1{}^{\alpha-2} b_1{}^{\beta} \ldots g_1{}^{\vartheta} - ab\, a_1{}^{\alpha-1} b_1{}^{\beta-1} \ldots g_1{}^{\vartheta} - g^2 a_1{}^{\alpha} b_1{}^{\beta} \ldots g_1{}^{\vartheta-2}$$
$$\pm \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$+ a^{\alpha-1} b^{\beta} \ldots g^{\vartheta} a_1 + a^{\alpha} b^{\beta-1} \ldots g^{\vartheta} b_1 + \ldots + a^{\alpha} b^{\beta} \ldots g^{\vartheta-1} g_1 \Big).$$

Ersetzt man wieder die Symbole durch die Koeffizienten B und substituiert für letztere ihre Werte aus Formel VI, so erhält man folgende Summe:

$$B_{\alpha a,\ \beta b, \ldots, \vartheta g} = \frac{1}{\alpha!\ \beta! \ldots \vartheta!} \Big(\binom{\alpha}{1} + \binom{\beta}{1} + \ldots + \binom{\vartheta}{1}$$
$$- \binom{\alpha}{2} - \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{1} - \ldots - \binom{\vartheta}{2}$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$+ \binom{\alpha}{\alpha-1}\binom{\beta}{\beta} \ldots \binom{\vartheta}{\vartheta} + \binom{\alpha}{\alpha}\binom{\beta}{\beta-1} \ldots \binom{\vartheta}{\vartheta} + \ldots + \binom{\alpha}{\alpha}\binom{\beta}{\beta} \ldots \binom{\vartheta}{\vartheta-1} \Big).$$

Da aber, wie bereits bewiesen,

$$\binom{\alpha}{1} + \binom{\beta}{1} + \ldots \binom{\vartheta}{1} = \binom{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta}{1}$$

$$\binom{\alpha}{2} + \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{1} + \ldots + \binom{\vartheta}{2} = \binom{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta}{2}$$

u. s. w.

ist, so geht obiger Ausdruck über in

$$B_{\alpha a, \ldots, \beta b, \vartheta g} = \frac{1}{\alpha!\ \beta! \ldots \vartheta!} \Big(\binom{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta}{1} - \binom{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta}{2}$$
$$+ \ldots + \binom{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta}{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta-1} \Big).$$

Ferner ist

$$0 = (1-1)^{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta} = \binom{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta}{0} - \binom{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta}{1} + \ldots$$
$$- \binom{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta}{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta-1} + \binom{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta}{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta},$$

mithin durch Substitution

$$B_{\alpha a,\ \beta b,\ldots,\vartheta g} = \frac{1}{\alpha!\ \beta!\ldots\vartheta!}\left(\binom{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta}{0} + \binom{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta}{\alpha+\beta+\ldots+\vartheta}\right) = \frac{2}{\alpha!\ \beta!\ldots\vartheta!}$$

und nach Formel I

$$A_{\alpha a,\ \beta b,\ldots,\vartheta g} = \frac{1}{\alpha!\,\beta!\ldots\vartheta!}\ \frac{(\alpha a+\beta b+\ldots\vartheta g)!}{a!^{\alpha}\ b!^{\beta}\ \ldots g!^{\vartheta}},$$

was zu beweisen war.

Ist $\alpha+\beta+\ldots+\vartheta$ ungerade, so erhält man, wenn man die rechte Seite von Formel IV entwickelt, für die symbolischen Produkte die Koeffizienten B substituiert und letztere durch ihre Werte aus Formel VI ersetzt, folgende Summe:

$$B_{\alpha a,\beta b,\ldots,\vartheta g} = \frac{1}{\alpha!\ \beta!\ldots\vartheta!}\cdot$$

$$\Big[\, a\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{0}\ldots\binom{\vartheta}{0} + b\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{1}\ldots\binom{\vartheta}{0} + \ldots + g\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{0}\ldots\binom{\vartheta}{1}$$

$$-2a\binom{\alpha}{2}\binom{\beta}{0}\ldots\binom{\vartheta}{0} - (a+b)\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{1}\ldots\binom{\vartheta}{0} - \ldots - 2g\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{0}\ldots\binom{\vartheta}{2}$$

$$\pm\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-\ ((\alpha-1)\ a + \beta b + \ldots + \vartheta g)\ \binom{\alpha}{\alpha-1}\binom{\beta}{\beta}\ldots\binom{\vartheta}{\vartheta}$$

$$-\ (\alpha a + (\beta-1)\ b + \ldots + \vartheta g)\ \binom{\alpha}{\alpha}\binom{\beta}{\beta-1}\ldots\binom{\vartheta}{\vartheta}$$

$$-\ (\alpha a + \beta b + \ldots + (\vartheta-1)\ g)\ \binom{\alpha}{\alpha}\binom{\beta}{\beta}\ldots\binom{\vartheta}{\vartheta-1}\,\Big].$$

Addiert man in dieser Gleichung auf beiden Seiten das Glied

$$\frac{1}{\alpha!\ \beta!\ldots\vartheta!}\ (\alpha a+\beta b+\ldots+\vartheta g),$$

so ist die rechte Seite gleich Null, denn sie besteht aus Summen von der Form

$$\pm \sum_{\vartheta_1=0}^{\vartheta_1=\vartheta} (\alpha_1 a+\beta_1 b+\ldots+\vartheta_1 g)\binom{\alpha}{\alpha_1}\binom{\beta}{\beta_1}\ldots\binom{\vartheta}{\vartheta_1}.$$

Nun ist aber

$$\pm \sum_{\vartheta_1=0}^{\vartheta_1=\vartheta} (\alpha_1 a+\beta_1 b+\ldots+\vartheta_1 g)\binom{\alpha}{\alpha_1}\binom{\beta}{\beta_1}\ldots\binom{\vartheta}{\vartheta_1} =$$

$$\pm (\alpha_1 a+\beta_1 b+\ldots+\eta_1 f)\binom{\alpha}{\alpha_1}\binom{\beta}{\beta_1}\ldots\binom{\eta}{\eta_1}\sum_{\vartheta_1=0}^{\vartheta_1=\vartheta}\binom{\vartheta}{\vartheta_1}$$

$$\pm \binom{\alpha}{\alpha_1}\binom{\beta}{\beta_1}\ldots\binom{\eta}{\eta_1} g \sum_{\vartheta_1=0}^{\vartheta_1=\vartheta} \vartheta_1 \binom{\vartheta}{\vartheta_1}.$$

Die Summen auf der rechten Seite sind aber gleich Null, mithin ist

$$B_{\alpha a,\ \beta b,\ldots,\ \vartheta g} = -(\alpha a+\beta b+\ldots+\vartheta g)\frac{1}{\alpha!\ \beta!\ldots\vartheta!}$$

und nach Formel III

$$A_{\alpha a,\beta b,\ldots,\vartheta g} = \frac{1}{\alpha!\ \beta!\ldots\vartheta!}\ \frac{(\alpha a+\beta b+\ldots+\vartheta g)!}{a!^{\alpha}\ b!^{\beta}\ \ldots g!^{\vartheta}}.$$

Es soll nun noch der numerische Koeffizient eines Produktes gefunden werden, welches aus einem Element φ und aus Elementen ψ zusammengesetzt ist, mithin die Form $\varphi_a \psi_b^{\beta} \psi_c^{\gamma} \ldots \psi_g^{\vartheta}$ hat.

Berechnet man nach Formel II und IV analog den früheren Fällen die Koeffizienten eines Produktes von obiger Form, indem man mit den einfachsten beginnt, so erhält man für den Koeffizienten des gegebenen Produktes den Ausdruck

VII. $$A_{\alpha,\beta b,\gamma c,\ldots\vartheta g} = \frac{(a+\beta b+\gamma c+\ldots+\vartheta g)!}{a!\ b!^{\beta}\ c!^{\gamma}\ \ldots\ g!^{\vartheta}}\binom{1/2}{1}\ \frac{1}{\beta!\ \gamma!\ldots\vartheta!}$$

$$\frac{a-\sum^{n}(2\beta-1)ba-\sum^{n-1}(2(\beta+\gamma)-1)bca-\ldots-\sum^{n-2}(2(\beta+\gamma+\ldots+\vartheta)-1)bc\ldots g}{(a+b)\ (a+c)\ \ldots\ (a+g)}$$

wobei n die Anzahl der Exponenten β, γ, ..., ϑ und

$$\Sigma\ (2\beta-1)\,b=(2\beta-1)b+(2\gamma-1)c+\ldots+(2\vartheta-1)g,$$

$$\Sigma(2(\beta+\gamma)-1)bc=(2(\beta+\gamma)-1)bc+(2(\beta+\vartheta)-1)bd+\ldots$$
$$+\ (2(\eta+\vartheta)-1)fg,$$

u. s. w.

ist.

Beim Beweise dieser Formel ist wieder zu unterscheiden, ob $\beta+\gamma+\ldots+\vartheta$ gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle ist nach Formel II:

$$\pm\ \Sigma\ ab^{\beta_1}c^{\gamma_1}\ldots g^{\vartheta_1}b_1^{\beta-\beta_1}c_1^{\gamma-\gamma_1}\ldots g_1^{\vartheta-\vartheta_1}$$
$$=-\Big((a+a_1)(b-b_1)^{\beta}(c-c_1)^{\gamma}\ldots(g-g_1)^{\vartheta}-ab^{\beta}c^{\gamma}\ldots g^{\vartheta}-a_1b_1^{\beta}c_1^{\gamma}\ldots g_1^{\vartheta}\Big)$$
$$=2a\Big(b_1^{\beta}c_1^{\gamma}\ldots g_1^{\vartheta}+bb_1^{\beta-1}c_1^{\gamma}\ldots g_1^{\vartheta}+cb_1^{\beta}c_1^{\gamma-1}\ldots g_1^{\vartheta}+\ldots$$
$$+gb_1^{\beta}c_1^{\gamma}\ldots g_1^{\vartheta-1}-b^2b_1^{\beta-2}c_1^{\gamma}\ldots g_1^{\vartheta}-$$
$$-bcb_1^{\beta-1}c_1^{\gamma-1}\ldots g_1^{\vartheta}-\ldots-g^2b_1^{\beta}c_1^{\gamma}\ldots g_1^{\vartheta-2}$$
$$\pm\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+b^{\beta-1}c^{\gamma}\ldots g^{\vartheta}b_1+b^{\beta}c^{\gamma-1}\ldots g^{\vartheta}c_1+\ldots+b^{\beta}c^{\gamma}\ldots g^{\vartheta-1}g_1\Big).$$

Ersetzt man die symbolischen Produkte durch die Koeffizienten B, substituiert für letztere ihre Werte aus Formel VII und subtrahiert auf beiden Seiten das Glied

$$2\binom{1/2}{1}\frac{1}{\beta!\gamma!\ldots\vartheta!}\,\frac{a^n-\Sigma(2\beta-1)b\,a^n}{(a+b)}-\ldots-\frac{(2(\beta+\gamma+\ldots+\vartheta)-1)bc\ldots g}{(a+c)\ldots(a+g)},$$

so erhält man auf der rechten Seite eine Summe, deren allgemeines Glied die Form hat

$$+\binom{1/2}{1}\frac{1}{\beta!\,\gamma!\ldots\vartheta!}\binom{\beta}{\beta_1}\binom{\gamma}{\gamma_1}\ldots\binom{\vartheta}{\vartheta_1}$$
$$\frac{a^n-\Sigma(2\beta_1-1)b\,a^{n-1}}{(a+b)}-\ldots-\frac{(2(\beta_1+\gamma_1\ldots+\vartheta_1)-1)bc\ldots g}{(a+c)\ldots(a+g)}$$

Addiert man diese Summe zu sich selbst in der Weise,

dass man zu dem angeführten Glied ein anderes von der Gestalt

$$+\binom{1/2}{1}\frac{1}{\beta!\gamma!\ldots\vartheta!}\binom{\beta}{\beta-\beta_1}\binom{\gamma}{\gamma-\gamma_1}\cdots\binom{\vartheta}{\vartheta-\vartheta_1}$$

$$\cdot\frac{a-\sum(2(\beta-\beta_1)-1)ba-\ldots-(2(\beta-\beta_1+\gamma-\gamma_1+\ldots+\vartheta-\vartheta_1)bc-1)\ldots g}{(a+b)\ (a+c)\ldots(a+g)}$$

nimmt, so erhält man eine Summe, deren allgemeines Glied

$$\pm\ 2\binom{1/2}{1}\frac{1}{\beta!\gamma!\ldots\vartheta!}$$

$$\cdot\frac{a-\sum(\beta-1)ba-\ldots-(\beta+\gamma+\ldots\vartheta-1)\,b\,c\ldots g}{(a+b)\ (a+c)\ldots(a+g)}\ \binom{\beta}{\beta_1}\binom{\gamma}{\gamma_1}\cdots\binom{\vartheta}{\vartheta_1}$$

ist. Man bekommt alle Glieder dieser Summe, wenn man die Grössen $\beta_1, \gamma_1, \ldots, \vartheta_1$ die Werte von Null bis respektive $\beta, \gamma, \ldots \vartheta$ durchlaufen lässt, wobei ein Glied das Vorzeichen $+$ oder $-$ erhält, je nachdem $\beta_1+\gamma_1+\ldots+\vartheta_1$ ungerade oder gerade ist. Diese Summe hat demnach die Form

$$\pm\ C\ \Sigma\ \binom{\beta}{\beta_1}\binom{\gamma}{\gamma_1}\cdots\binom{\vartheta}{\vartheta_1},$$

welche, wie man sich leicht überzeugt, gleich Null ist. Infolge dessen ist

$$B_{a,\beta b,\gamma c,\ldots,\vartheta g} = 2\binom{1/2}{1}\frac{1}{\beta!\gamma!\ldots\vartheta!}$$

$$\cdot\frac{a-\sum(2\beta-1)ba-\ldots-(2(\beta+\gamma+\ldots+\vartheta)-1)bc\ldots g}{(a+b)\ (a+c)\ldots(a+g)}$$

und nach Formel I

$$A_{a,\beta b,\gamma c,\ldots,\vartheta g} = \frac{(a+\beta b+\ldots+\vartheta g)!}{a!\,b!^{\beta}\,c!^{\gamma}\ldots g!^{\vartheta}}\binom{1/2}{1}\frac{1}{\beta!\ \gamma!\ldots\vartheta!}$$

$$\cdot\frac{a-\sum(2\beta-1)\,b\,a-\ldots-(2(\beta+\gamma+\ldots+\vartheta)-1)\,b\,c\ldots g}{(a+b)\ (a+c)\ldots(a+g)}.$$

Ist $\beta+\gamma+\ldots+\vartheta$ ungerade, dann folgt nach Formel IV

$$\pm\Sigma ab^{\beta_1}c^{\gamma_1}\ldots g^{\vartheta_1}b_1^{\beta-\beta_1}c_1^{\gamma-\gamma_1}\ldots g_1^{\vartheta-\vartheta_1}$$

$$=((a+a_1)(b-b_1)^{\beta}(c-c_1)^{\gamma}\ldots(g-g_1)^{\vartheta}-ab^{\beta}c^{\gamma}\ldots g^{\vartheta}+a_1b_1^{\beta}c_1^{\gamma}\ldots g_1^{\vartheta}).$$

Entwickelt man wieder die rechte Seite, ersetzt die Symbole durch die Koeffizienten B und letztere durch ihre Werte nach Formel VII, so erhält man eine Summe, deren allgemeines Glied die Form hat

$$\pm\binom{1/2}{1}\frac{1}{\beta!\gamma!\ldots\vartheta!}\binom{\beta}{\beta_1}\binom{\gamma}{\gamma_1}\ldots\binom{\vartheta}{\vartheta_1}(a+(\beta-2\beta_1)b+(\gamma-2\gamma_1)c+\ldots$$

$$+(\vartheta-2\vartheta_1)g).$$

$$\cdot\frac{a^n-\Sigma(2(\beta-\beta_1)-1)ba^{n-1}-\Sigma(2(\beta-\beta_1+\gamma-\gamma_1)-1)bca^{n-2}-\ldots}{(a+b)\ (a+c)\ldots(a+g)}$$

$$-\frac{(2(\beta-\beta_1+\gamma-\gamma_1+\ldots+\vartheta-\vartheta_1)-1)\,bc\ldots g,}{(a+b)\ (a+c)\ldots(a+g)}$$

wobei immer zwei Glieder vereinigt sind, welche gleiche Binomialkoeffizienten besitzen.

Wenn man auf beiden Seiten den Ausdruck

$$(a+\beta b+\gamma c+\ldots+\vartheta g)\binom{1/2}{1}\frac{1}{\beta!\gamma!\ldots\vartheta!}\binom{\beta}{0}\binom{\gamma}{0}\ldots\binom{\vartheta}{0}.$$

$$\cdot\frac{a^n-\Sigma(2\beta-1)\,ba^{n-1}-\ldots-(2(\beta+\gamma+\ldots+\vartheta)-1)\,bc\ldots g}{(a+b)\ (a+c)\ldots(a+g)}$$

addiert, so lässt sich beweisen, dass die so entstehende Summe auf der rechten Seite gleich Null ist. Zu diesem Zwecke addiert man dieselbe zu sich selbst in der Weise, dass man immer zwei Glieder vereinigt, welche folgende Gestalt besitzen:

$$\pm\binom{1/2}{1}\frac{1}{\beta!\gamma!\ldots\vartheta!}\binom{\beta}{\beta_1}\binom{\gamma}{\gamma_1}\ldots\binom{\vartheta}{\vartheta_1}(a+(\beta-2\beta_1)b+(\gamma-2\gamma_1)c$$

$$+\ldots+(\vartheta-2\vartheta_1)g).$$

$$\frac{a^n - \Sigma (2(\beta-\beta_1)-1)\,ba^{n-1} - \Sigma(2(\beta-\beta_1+\gamma-\gamma_1)-1)bc\,a^{n-2} - \dots}{(a+b)\,(a+c)\dots(a+g)}$$

$$- \frac{(2(\beta-\beta_1+\gamma-\gamma_1+\dots+\vartheta-\vartheta_1)-1)bc\dots g}{(a+b)\,(a+c)\dots(a+g)}$$

und

$$\pm\binom{1/2}{1}\frac{1}{\beta!\gamma!\dots\vartheta!}\binom{\beta}{\beta_1}\binom{\gamma}{\gamma_1}\dots\binom{\vartheta}{\vartheta_1}(a+(\beta-2\beta_1)b+(\gamma-2\gamma_1)c+\dots$$

$$+(\vartheta-2\vartheta_1)g)$$

$$\frac{a^n - \Sigma\,(2\beta_1-1)\,b\,a^{n-1} - \Sigma\,(2(\beta_1+\gamma_1)-1)\,bc\,a^{n-2} - \dots}{(a+b)\,(a+c)\dots(a+g)}$$

$$- \frac{(2(\beta_1+\gamma_1+\dots+\vartheta_1)-1)bc\dots g}{(a+b)\,(a+c)\dots(a+g)}.$$

Auf diese Weise erhält man lauter Summen mit abwechselnden Vorzeichen von der Form

$$\pm C\binom{\gamma}{\gamma_1}\binom{\vartheta}{\vartheta_1}\dots\binom{\vartheta}{\vartheta_1}\sum_{\beta_1=0}^{\beta_1=\beta}(\beta-2\beta_1)\binom{\beta}{\beta_1}.$$

Diese Summe ist aber gleich Null, denn wenn

$$S = \pm\sum_{\beta_1=0}^{\beta_1=\beta}\binom{\beta}{\beta_1}x^{\beta-2\beta_1}$$

ist, so folgt

$$S\,x^\beta = -(1-x^2)^\beta$$

und

$$S = -\frac{(1-x^2)^\beta}{x^\beta}.$$

Man erhält aber die vorliegende Summe, wenn man $\frac{dS}{dx}$ bildet und hernach $x=1$ setzt. Nun ist

$$\frac{dS}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{(1-x^2)^\beta}{x^\beta}\right)_{x=1} = 0,$$

mithin folgt

$$B_{a,\beta b,\gamma c,\ldots,\vartheta g} = -\binom{1/2}{1}\frac{1}{\beta!\gamma!\ldots\vartheta!}\cdot(a+\beta b+\ldots+\vartheta g)\cdot$$

$$\frac{a-\sum^{n}(2\beta-1)ba-\ldots-(2(\beta+\gamma+\ldots+\vartheta)-1)^{n-1}bc\ldots g}{(a+b)\ (a+c)\ldots(a+g)}$$

und nach Formel III der für den Koeffizienten $A_{a,\beta b,\gamma c,\ldots,\vartheta g}$ gesuchte Wert.

Diese Beispiele mögen gezeigt haben, wie man mit Hilfe der Formeln I bis IV den numerischen Koeffizienten eines gegebenen Produktes berechnen kann.